(Versión 1)

Problema Parabólico versión 1: (30pts) Un pato vuela horizontalmente en línea recta con velocidad $\vec{v}_p = 10\hat{i}[m/s]$ a una altura $h = 5[m]$ del suelo. En ese instante, un joven con una honda lanza una piedra a una altura de $H = 1{,}5[m]$ con una rapidez v_0 con un ángulo θ_0 (desconocidos). Si la piedra alcanza al pato a una distancia $D = 25[m]$ en un tiempo de 2,5[s], se pide determinar:
a) Las condiciones iniciales para la piedra.**(4pts)**)
b) Las ecuaciones de movimiento para la piedra (Integrando)**(8pts)**)
c) La rapidez v_0 y ángulo de disparo θ_0.**(10pts)**)
d) La velocidad con la cual impacta la piedra al pato, responder si impacta al pato por la parte inferior o superior (Justificar su respuesta **(8pts)**).

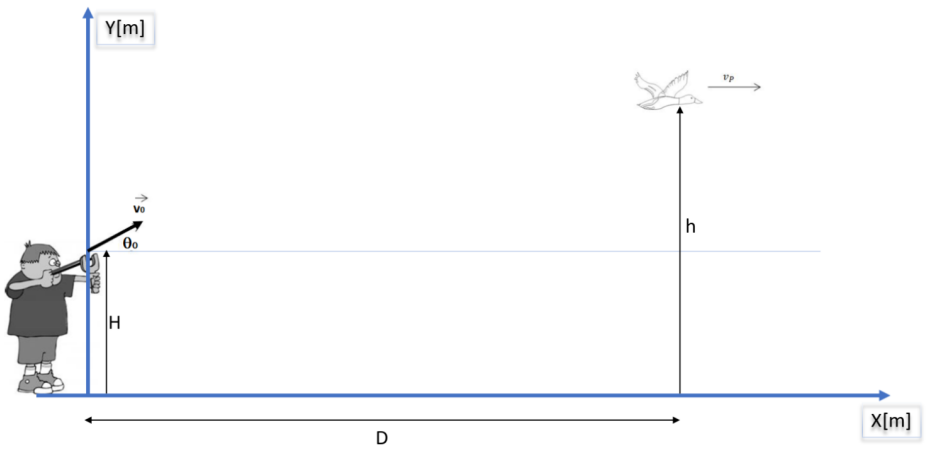


Figura 1: Problema de parabólico

a) **Condiciones iniciales**:

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= -9{,}8\hat{j}\,[m/s^2] \rightarrow (1pts) \\
\vec{v}_0 &= v_0\cos\theta_0\hat{i} + v_0\sin\theta_0\hat{j}\,[m/s] \rightarrow (2pts) \\
\vec{r}_0 &= 0\hat{i} + 1{,}5\hat{j}\,[m] \rightarrow (1pts)
\end{aligned}$$

b) **Ecuaciones de movimiento**
1) para la velocidad:

$$\begin{aligned}
\vec{v}(t) &= \int \vec{a}\,dt \\
&= \int -9{,}8\hat{j}\,dt \\
&= -9{,}8t\hat{j} + C_v
\end{aligned}$$

donde C_v es la constante de velocidad que se obtiene de evaluar la condición inicial de velocidad.

$$\vec{v}(t=0) = v_0\cos\theta_0\hat{i} + v_0\sin\theta_0\hat{j} \rightarrow C_v = v_0\cos\theta_0\hat{i} + v_0\sin\theta_0\hat{j} \;\rightarrow\; (2pts)$$

La ecuación para la velocidad queda entonces definida por:

$$\vec{v}(t) = v_0\cos\theta_0\hat{i} + (v_0\sin\theta_0 - 9{,}8t)\hat{j} \;\rightarrow\; (2pts)$$

2) para la posición:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\,dt$$

$$\begin{aligned} &= \int [v_0 \cos\theta_0 \hat{i} + (v_0 \sin\theta_0 - 9{,}8t)\hat{j}]\, dt \\ &= v_0 \cos\theta_0\, t\hat{i} + (v_0 \sin\theta_0\, t - 4{,}9t^2)\hat{j} + C_p \end{aligned}$$

donde C_p es la constante de posición que se obtiene de evaluar la condición inicial de posición.

$$\vec{r}(t=0) = 0\hat{i} + 1{,}5\hat{j} \rightarrow C_p = 0\hat{i} + 1{,}5\hat{j} \;\rightarrow\; (2pts)$$

La ecuación para la posición queda entonces definida por:

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos\theta_0\, t\hat{i} + (1{,}5 + v_0 \sin\theta_0\, t - 4{,}9t^2)\hat{j} \;\rightarrow\; (2pts)$$

c) Para determinar la rapidez inicial v_0 y el ángulo inicial θ_0 analizamos la información que tenemos la posición de la piedra para un tiempo de t=2.5[s] es conocida la altura.

$$\vec{r}(t = 2{,}5[s]) = v_0 \cos\theta_0 \cdot 2{,}5\hat{i} + (1{,}5 + v_0 \sin\theta_0 \cdot 2{,}5 - 4{,}9 \cdot 2{,}5^2)\hat{j} = 25\hat{i} + 5\hat{j} \;\rightarrow\; (2pts)$$

Separando para cada eje tenemos:

$$\begin{aligned} v_0 \cos\theta_0 \cdot 2{,}5 &= 25 \rightarrow (a) \;\rightarrow\; (1pts) \\ 1{,}5 + v_0 \sin\theta_0 \cdot 2{,}5 - 4{,}9 \cdot 2{,}5^2 &= 5 \rightarrow (b) \;\rightarrow\; (1pts) \end{aligned}$$

evaluando los valores en (a) se obtiene:

$$v_0 \cos\theta_0 = 10$$

evaluando los valores en (b) se obtiene:

$$\begin{aligned} v_0 \sin\theta_0 \cdot 2{,}5 - 30{,}625 &= 5 \\ v_0 \sin\theta_0 \cdot 2{,}5 &= 34{,}125 \\ v_0 \sin\theta_0 &= 13{,}65 \end{aligned}$$

Dividiendo se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0 \cos\theta_0} &= \frac{13{,}65}{10} \\ \tan\theta_0 &= 1{,}37 \end{aligned}$$

Despejando el ángulo:

$$\theta_0 = \tan^{-1}(1{,}37) \Longrightarrow \theta_0 = 53{,}77^\circ \;\rightarrow\; (3pts)$$

La rapidez v_0 se logra evaluando en por ejemplo:

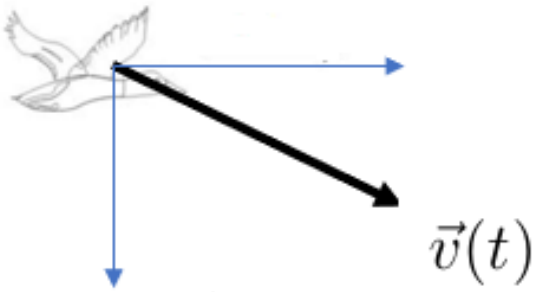
$$v_0 \cos(53{,}77) = 10 \Longrightarrow v_0 = 16{,}92\,[m/s] \;\rightarrow\; (3pts)$$

d) Para determinar la velocidad con la cual impacta al pato se debe evaluar la ecuación para la velocidad en t=2.5[s].

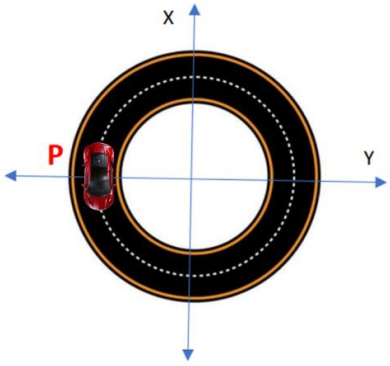
$$\vec{v}(t = 2{,}5) = 16{,}92\cos(53{,}77)\hat{i} + (16{,}92\sin(53{,}77) - 9{,}8 \cdot 2{,}5)\hat{j}$$

$$\vec{v}(t = 2{,}5) = 10\hat{i} - 10{,}85\hat{j} \;\rightarrow\; (4pts)$$

Dado que el vector velocidad tiene componente negativa asociada a Y podemos afirmar que el impacto es en la parte **superior (4pts)** del pato (ver figura).


$\vec{v}(t)$

En la siguiente figura, un vehículo de carrera ubicado en punto P inicia su movimiento a partir del reposo en sentido antihorario, llegando a tener una rapidez angular de 0.03 [rad/s] a los 2.0 segundos de iniciado su movimiento. Si la pista de carrera tiene un perímetro de 3.0 [km] entonces determine. Truncar a dos decimales.



1. El módulo de la aceleración angular del vehículo.

2. La rapidez angular $\omega(t)$ para todo tiempo mediante integración.

3. La dirección $\theta(t)$ para todo tiempo mediante integración.

4. En coordenadas cartesianas el vector posición y en coordenadas polares tanto la velocidad tangencial como la aceleración total del vehículo a los 10,0[s]

5. La cantidad de metros recorridos por vehículo a los 20,0[s].

1.

w(0)=0[rad/s]
w(2)=0,03[rad/s]
$\alpha = \frac{w(2)-w(0)}{2-0} = 0{,}015[\text{rad/s}^2]$ 2p

2.
$w(t) = \int \alpha dt = \int 0{,}015dt = 0{,}015t + C$
$C = 0$ 1p
$w(t) = 0{,}015t[\text{rad/s}]$ 4p

3.
$\theta(0) = 180º = 3{,}14[\text{rad}]$ 1p
$\theta(t) = \int wdt = \int 0{,}015tdt = 0{,}0075\text{t}^2 + \text{D}$
D = 3,14 1p
$\theta(t) = 0{,}0075\text{t}^2 + 3{,}14[\text{rad}]$ 4p

4.

$\theta(10) = 3{,}89[rad] = 222{,}89[º]$ 1p

P = $2\pi r$

r=$\frac{P}{2\pi} = 477{,}46[m]$ radio 1p

$\vec{r}(10) = 477{,}46\cos(222{,}89º)\,\hat{\imath} + 477{,}46\sin(222{,}89º)\,\hat{\jmath}[m] = -349{,}81\hat{\imath} - 324{,}95\hat{\jmath}[m]$ 3p

$\hat{v}(10) = 0{,}15 * 477{,}46\hat{\theta} = 71{,}61\hat{\theta}[m/s]$ 3p

$\vec{a}(10) =$ - 0,15^2*477,46$\hat{R}$ + 0,015*477,46$\hat{\theta}$[m/s^2] = -10,74$\hat{R}$ + 7,16$\hat{\theta}$[m/s^2] 3p

5.

$\theta(20) = 0{,}0075 * 20^2 + 3{,}14 = 6{,}14[rad]$ 2p

6,28[rad] = 1 vuelta

6,14[rad] = x vueltas

x = 0,97 vueltas 1p

metros recorridos a los 20[s] = 0,97*3000[m] = 2910[m] 2p